Rappel :

Cours 11.2
28.11.24

Déf. 6.1.16 : Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un S.E.V.
On définit l'orthogonal de W comme

$$W^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot w = 0 \quad \forall w \in W \}$$

Ainsi $W^\perp$ est l'ens. des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de W

Ortho-Théorème 6.1.17

Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ est un s.E.V, alors

0) Si $W = \text{Vect}\{w_1, \dots, w_p\}$ (avec $w_i \in W$)

alors $v \in W^\perp \iff v \perp w_i \quad \forall i = 1, \dots, p$

1) $W^\perp$ est un sous-esp. vect. de $\mathbb{R}^n$

2) $W \cap W^\perp = \{0\}$ $\quad (W^\perp)^\perp = W$

3) $\dim(W) + \dim(W^\perp) = n$.

Exemple important $\boxed{6.1.18}$ $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$$x \mapsto Ax$$

Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ alors

$$(\mathrm{Lgn}(A))^{\perp} = \mathrm{Ker}(A) \qquad \heartsuit$$

et $$(\mathrm{Im}(A))^{\perp} = \mathrm{Ker}(A^T) \qquad \spadesuit$$

⚠ Ici $\mathrm{Lgn}(A) = \mathrm{Col}(A^T)$ est à considérer comme sous-espace de $\mathbb{R}^n$

explication de $\heartsuit$

$$A = \begin{pmatrix} -\!-\!-\!-\; \ell_1 \;-\!-\!-\!- \\ -\!-\!-\!-\; \ell_2 \;-\!-\!-\!- \\ \vdots \\ -\!-\!-\!-\; \ell_m \;-\!-\!-\!- \end{pmatrix}_{m\times n}$$

où $\ell_i \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ sont les <u>lignes de A</u>

que l'on interprète comme éléments de $\mathbb{R}^n$

càd on considère $\ell_i^T \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$

(et ce sont les colonnes de A^T)

$$\operatorname{Ker}(A) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; Ax = \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^m}}{0} \right\}$$

Rappel :

$$\underbrace{Ax = \begin{pmatrix} \text{---} & l_1 & \text{---} \\ \text{---} & l_2 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & l_m & \text{---} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \begin{pmatrix} l_1^T \cdot x \\ l_2^T \cdot x \\ \vdots \\ l_m^T \cdot x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Donc $\operatorname{Ker}(A) =$

$$= \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; l_1^T \cdot x = l_2^T \cdot x = \cdots = l_m^T \cdot x = 0 \right\}$$

$$\underset{\text{déf}}{=} \left(\operatorname{Lgn}(A)\right)^{\perp}$$

Fin de ♡ 6.1.18.

sous-exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Lgn}(A) = \operatorname{Col}(A^T) = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{Lgn}(A)^\perp = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \ \& \ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x = 0 \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{matrix} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(<u>Rem</u> $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$
$\dim(\mathrm{Lgn}(A)) = 2$ et $1+2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$)

Fin 6.1.18

<u>Exemple important 6.1.19</u>

Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $W = \mathrm{Vect}\{v\} \subset \mathbb{R}^n$

la droite engendrée par v

$\dim(W) = 1$

$W^\perp = ?$

Ortho-Thm $\Rightarrow$ $\underbrace{\dim(W)}_{1} + \dim(W^\perp) = n$

$\Rightarrow \dim(W^\perp) = n - 1$

écrivons $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ fixé avec $v \neq 0$

$$W^\perp = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot v = 0 \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i v_i = 0 \}$$

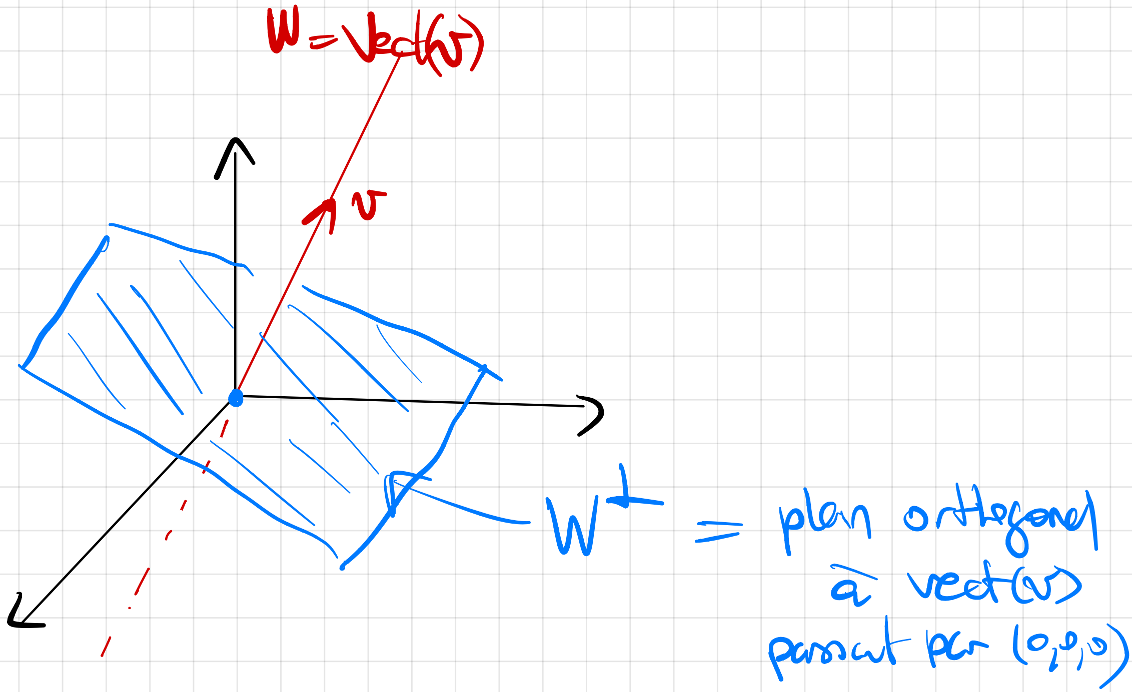
$$= \{ x \in \mathbb{R}^n \mid v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots + v_n x_n = 0 \}$$

système linéaire
1 équation
à n inconnues

$W^\perp$ est appelé <u>l'hyperplan orthogonal à v</u>

$\dim(W^\perp) = n-1$ et $(W^\perp)^\perp = W = \mathrm{Vect}(v)$

Dans $\mathbb{R}^3$:



Dans $\mathbb{R}^4$ p.ex : $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

$$H = \mathrm{Vect}(v)^{\perp} = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \cdot v = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 0 \right\}$$

de dim 3 dans $\mathbb{R}^4$

Fin 6.2.19

§ 6.2 Famille orthogonales

avec $p \geq 1$

Déf 6.2.1 : Une famille, partie $\{u_1, \dots, u_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ est dite orthogonale si

$$\begin{cases} u_i \perp u_j \quad (\text{càd } u_i \cdot u_j = 0) & \forall i \neq j \\ u_i \cdot u_i \neq 0 \quad \forall i & (\text{càd } u_i \neq 0_{\mathbb{R}^n}) \end{cases}$$

exemples 6.2.2

1) Dans $\mathbb{R}^n$, la base canonique $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une famille orthogonale (de plus $\|e_i\| = 1$)

2) $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $u_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$

famille orthog. de $\mathbb{R}^3$

__Def 6.2.3__ : Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sev.

On appelle __base orthogonale de W__ toute partie orthogonale $\{w_1, \dots, w_p\}$ telle que $\mathrm{Vect}\{w_1, \dots, w_p\} = W$.

__Théorème 6.2.4__ : Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$

$W = \mathrm{Vect}\{w_1, \dots, w_p\}$ avec $w_i \neq 0$.

1) Si $\{w_1, \dots, w_p\}$ est orthogonale alors elle est lin. indépendante c'est donc une base orthogonale de W.

2) Si $\{w_1, \dots, w_p\}$ est orthogonale alors $\forall\ w \in W$ on a

$$w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_p w_p$$

avec $\boxed{\lambda_i = \dfrac{w \cdot w_i}{w_i \cdot w_i}}$ $\forall i = 1, \dots, p$.

<u>démo de 2</u> : soit $w \in W$

écrivons $w \overset{*}{=} \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_p w_p$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Calculons, de part et d'autre de $*$, le produit scalaire avec w_i

$$w \cdot w_i = (\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_p w_p) \cdot w_i$$

$$= \lambda_1 w_1 \cdot w_i + \cdots + \lambda_p w_p \cdot w_i$$

$$w \cdot w_i = \lambda_i \underbrace{w_i \cdot w_i}_{\neq 0}$$

car $\{w_1, \dots, w_p\}$ orthogonale

$$\Rightarrow \quad \lambda_i = \frac{w \cdot w_i}{w_i \cdot w_i}$$

qed 2)

Fin 6.2.4.

<u>ex 6.2.5</u> : écrire v comme C.L de

$$v = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{pmatrix}}_{v_3}$$

base orthog. de $\mathbb{R}^3$

Thm $\Rightarrow$ $\lambda_1 = \dfrac{v \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} = \dfrac{11}{11} = 1$

$$\lambda_2 = \frac{v \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} = \frac{-12}{6} = -2$$

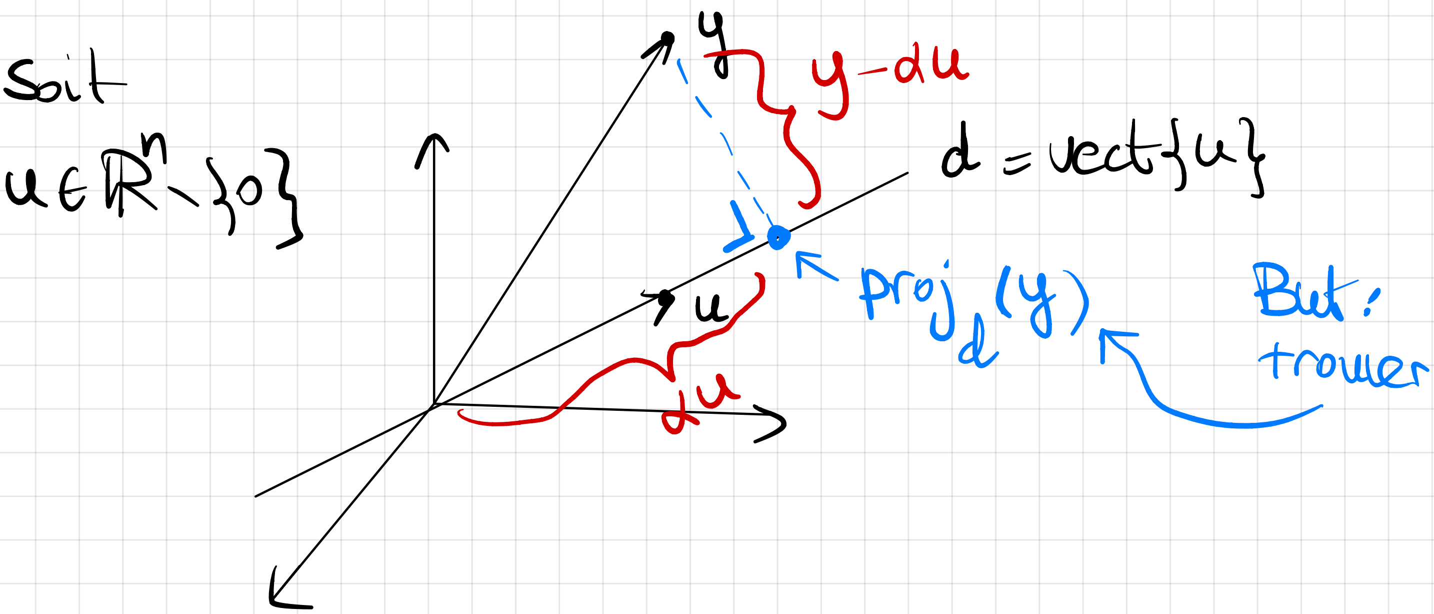
$$\lambda_3 = \frac{v \cdot v_3}{v_3 \cdot v_3} = \frac{-33}{33/2} = -2$$

Fin 6.2.5.

§ 6.3 Projections orthogonales sur une droite

Proj. orth. sur une droite de $\mathbb{R}^n$:

Soit $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$



On cherche, $\forall y \in \mathbb{R}^n$, un vecteur $\mathrm{proj}_d(y) \in d$

et donc $\mathrm{proj}_d(y) = \alpha u$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$

et telle que $y - \alpha u$ soit orthogonal à u

càd $(y - \alpha u) \cdot u = 0$.

<u>Proposition 6.3.1.</u> $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors

$d = \mathrm{Vect}\{u\}$

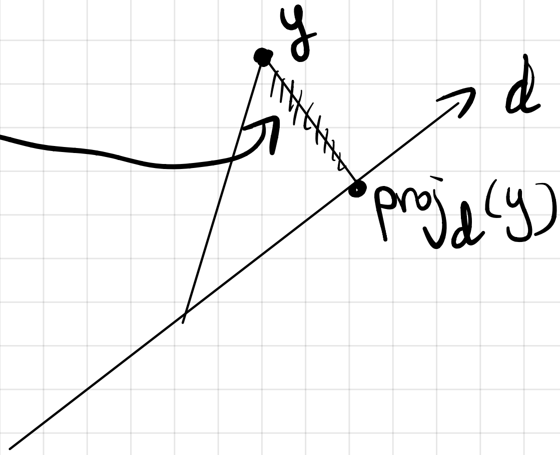
1) $\forall y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\mathrm{proj}_d(y) = \underbrace{\left(\frac{y \cdot u}{u \cdot u}\right)}_{\alpha \in \mathbb{R}} u$$

2) La distance de y à la droite d

est égale à

$$\| y - \mathrm{proj}_d(y) \|$$



Cela définit une transformation <u>lin.</u>

exo

$$\mathrm{proj}_d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$y \mapsto \left(\frac{y \cdot u}{u \cdot u}\right) u$$

t.q $\mathrm{Im}(\mathrm{proj}_d) = d$

et $\mathrm{Ker}(\mathrm{proj}_d) = d^{\perp} =$ l'hyperplan ortho à d

démo de 1 :

Posons $\text{proj}_{\mathcal{d}}(y) = \alpha u$ et soit

$$z = y - \text{proj}_{\mathcal{d}}(y) = y - \alpha u \quad \text{(on cherche } \alpha\text{)}$$

On veut que $z \perp u$ càd $z \cdot u = 0$

$$\Leftrightarrow (y - \alpha u) \cdot u = 0$$

$$\Leftrightarrow y \cdot u - \alpha u \cdot u = 0$$

$$\Leftrightarrow y \cdot u = \alpha \underbrace{u \cdot u}_{\neq 0 \text{ car } u \neq 0}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{y \cdot u}{u \cdot u} \quad \text{qed } 1.$$

ex 6.3.2 :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{d} = \text{Vect}\{u\}$$

$$\text{proj}_{\mathcal{d}}(y) = \left(\frac{y \cdot u}{u \cdot u} \right) u = \frac{15}{5} u = 3u = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

§ 6.4 Bases orthonormées

Déf 6.4.1 : famille $\{u_1, \dots, u_p\} \subset \mathbb{R}^n$ est dite <u>orthonormée</u> si

1) $u_i \cdot u_j = 0 \quad \forall i \neq j$

2) $u_i \cdot u_i = 1 \quad \forall i = 1, \dots, p$

càd $\|u_i\| = 1$. (on dit que u_i est <u>unitaire</u>)

Une famille orthonormée qui est une base de W est appelée <u>base orthonormée de W</u> (b.o.n)

ex. 6.4.2 :

0) la base canonique est une b.o.n de $\mathbb{R}^n$

1) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$W = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$ $\qquad (u_1 u_2 u_3)$ base orthogonale mais pas orthonormée

$\|u_1\| = \sqrt{3} \quad \|u_2\| = \sqrt{2} = \|u_3\|$

2) Si $\{u_1, \dots, u_p\}$ est une base orthog de W

alors $\left\{\frac{u_1}{\|u_1\|}, \dots, \frac{u_p}{\|u_p\|}\right\}$ est b.o.n. de W.

Théorème 6.4.4

Soient $\{u_1, \dots, u_n\}$ n vecteurs de $\mathbb{R}^m$

et soit $U = (u_1 \mid u_2 \mid \cdots \mid u_n)_{m \times n}$. Alors

$(T_U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$

1) la famille $\{u_1, \dots, u_n\}$ est orthonormale (les colonnes de U sont orthonormées) $\Leftrightarrow$ $\underbrace{U^T}_{M_{n\times m}(\mathbb{R})} \underbrace{U}_{M_{m\times n}(\mathbb{R})} = I_n$

(⚠ si $m \neq n$ on a pas forcément $UU^T = I_m$)

2) Supp que les u_i soient orthonormés,

alors $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ on a $\left(T_U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \atop x \mapsto Ux \right.$

i) $\|Ux\| = \|x\|$

ii) $Ux \cdot Uy = x \cdot y$ prod. scalaire dans $\mathbb{R}^n$

iii) $Ux \perp Uy \Leftrightarrow x \perp y$

dans $\mathbb{R}^m$

Morale de 2) : Si les colonnes de U sont orthonormées, alors

$$T_U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto Ux$$

préserve
- i) les distances\normes
- ii) les angles\ps
- iii) l'orthogonalité

expl. de 1)

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & | & \cdots & | & u_n \end{pmatrix} \qquad U^T = \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix}$$

$$U^TU = \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & | & \cdots & | & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & & u_1 \cdot u_n \\ u_2 \cdot u_1 & & u_2 \cdot u_n \\ & & \\ u_n \cdot u_1 & & u_n \cdot u_n \end{pmatrix}$$

u_i orthonormés

$$= I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Definition 6.4.5 : Soit $U \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ (carrée)

On dit que U est orthogonale

si ses colonnes sont orthonormées

(donc les colonnes de U forment une b.o.n de $\mathbb{R}^n$)

Théorème sur les matrices orthogonales 6.4.6

Soit $U \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) U est orthogonale (cf. déf ci-dessus)

2) $U^T U = I_n$

3) U est inversible et $U^{-1} = U^T$

4) $U U^T = I_n$

5) les lignes de U sont orthonormées.

ex 6.4.7 :

1) $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ orthogonale $A^{-1} = A^T$

2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = B^T = B$.

3) $C = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{66} \\ 1/\sqrt{11} & 2/\sqrt{6} & -4/\sqrt{66} \\ 1/\sqrt{11} & 1/\sqrt{6} & 7/\sqrt{66} \end{pmatrix}$ orthogonale $C^{-1} = C^T$

$\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\sqrt{11} = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$

les lignes sont orthonormées aussi !
(plus dur à vérifier mais vrai)

Rem : 6.4.8 En gén. $U^T U = I_n$
n'implique pas $UU^T = I_m$

prenons $n = 1$ $u \in \mathbb{R}^m$ vecteur unitaire

$\|u\| = 1 = \sqrt{\sum u_i^2}$, Alors $u^T u = 1 \in \mathbb{R}$

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$ tendls qe

$$UU^T = \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}}^{u}}_{m\times 1} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & & u_m \end{pmatrix}}_{1\times m} \in M_{m\times m}$$

$$= \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c|c} u_1 u & u_2 u & \cdots & u_m u \\ & & & \end{array}\right)}_{P}$$

ex : $u = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad P = uu^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En fait P a des bonnes propriétés :

$Pu = (uu^T)u = u(\underbrace{u^T u}_{1}) = u$ $\qquad$ u est vect. propre pour 1 si $v \perp u$ alors

$$Pv = (uu^T)v = u(u^Tv) = u \cdot 0 = 0$$

$v \in \ker(P)$

$$P^2 = (uu^T)(uu^T) = u\underbrace{(u^Tu)}_{I_n}u^T = uu^T = P$$

P projecteur